Ejercicios

Álgebra Lineal MAT127

PUCV

Ejercicio 1 *Sean* V *y* W *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$*,* $T : V \longrightarrow W$ *una transformación lineal y* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *una base de* V*. Demuestre que* $\operatorname{Im}(T) = \langle T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n) \rangle$.

Ejercicio 2 *Sean* V *y* W *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$*,* $T : V \longrightarrow W$ *una transformación lineal inyectiva y* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *un subconjunto linealmente independiente de* V*. Demuestre que* $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ *es un conjunto linealmente independiente de* W*.*

Ejercicio 3 *Sea* $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una función definida por* $T(x, y, z, w) = (x + y, z - w, x + w)$.

1. *Verifique que* T *es una transformación lineal.*
2. *Encuentre el núcleo de* T *y determine* $\dim(\ker(T))$
3. *Encuentre la imagen de* T *y determine* $\dim(\operatorname{Im}(T))$.
4. *¿Es* T *inyectiva?, ¿Es* T *epiyectiva?. Justifique.*

Ejercicio 4 *Calcule, si existe, el valor de* $\lambda \in \mathbb{R}$ *para que la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definido por* $T(x, y, z) = (\lambda x + 2y + z, \lambda x + y, y + z)$ *sea inyectiva.*

Ejercicio 5 *Sea* $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ *una función definida por*

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - c)x^3 + (b + d)x - a$$

1. *Demuestre que* T *es una transformación lineal.*
2. *Encuentre el núcleo de* T *y determine* $\dim(\ker(T))$.
3. *Encuentre la imagen de* T *y determine* $\dim(\operatorname{Im}(T))$.
4. *Determine si* T *es un isomorfismo. Justifique.*
5. *Determine si el núcleo de* T *es isomorfo a la imagen de* T*. Justifique.*

Ejercicio 6 *Sea* $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ *la función definida por* $T\left(ax^2 + bx + c\right) = \begin{pmatrix} b+c & a \\ 0 & 2c-a \end{pmatrix}$.

1. *Verifique que* T *es una transformación lineal.*
2. *Encuentre el núcleo y la imagen de* T*.*
3. *Determine* $\dim(\ker(T))$ *y* $\dim(\operatorname{Im}(T))$.
4. *Determine, si existen, las preimagenes de* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7 *Sea* $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ *la transformación lineal definida por* $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^3 + ax^2 + cx + d$.

1. *Demuestre que* T *es una transformación lineal.*
2. *Encuentre la dimensión del núcleo de* T*.*
3. *Encuentre* $n \in \mathbb{N}$*, para la cual la imagen de* T *es isomorfo a* $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8 *Sea* $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ *la función definida por* $L(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & x+iy \\ z & z+iy \end{pmatrix}$

1. *Demuestre que* L *es una* $\mathbb{R}$*-transformación lineal.*
2. *Encuentre el núcleo de* L *y determine* $\dim(\ker(L))$.
3. *Encuentre la imagen de* L *y determine* $\dim(\operatorname{Im}(L))$.
4. *¿Es* L *inyectiva?, ¿es* L *epiyectiva?. Justifique.*

Ejercicio 9 *Sea* $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ *la única* $\mathbb{C}-$*transformación lineal tal que* $T(e_1) = (1, 0, i)$, $T(e_2) = (0, 1, 1)$ *y* $T(e_3) = (i, 1, 0)$*, donde* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *es la base canónica de* $\mathbb{C}^3$.

1. *Encuentre* $T(x, y, z)$ *para todo* $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.
2. *Encuentre la imagen de* T *y determine* $\dim(\operatorname{Im}(T))$.
3. *Calcule* $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(T))$.
4. *Determine si* T *es un isomorfismo. Justifique.*

Ejercicio 10 *Sea* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *la transformación lineal definida por* $T_\lambda(x, y, z) = (\lambda x - y + z, x + y - 2z, x - y + z)$.

1. *Según los valores de* $\lambda \in \mathbb{R}$*, determine la dimensión del núcleo de* T_λ.
2. *Según los valores de* $\lambda \in \mathbb{R}$*, determine condiciones para* $a, b, c \in \mathbb{R}$*, para que* $(a, b, c) \in \operatorname{Im}(T_\lambda)$.

3. *Para $\mu \in \mathbb{R}$, determine la preimagen de $(1, \mu, 0)$ bajo T_1.*

Ejercicio 11 *Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ tales que $\dim(V) = \dim(W) = 3$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ bases de V y W, respectivamente. Sea $T : V \longrightarrow W$ la transformación lineal definida por*

$$\begin{aligned} T(v_1) &= u_1 + u_2 - u_3, \\ T(v_2) &= u_1 + u_3, \\ T(v_3) &= 2u_1 + u_2. \end{aligned}$$

1. *Determine $T(v)$, para todo $v \in V$.*
2. *Encuentre el núcleo de T y determine $\dim(\ker(T))$.*
3. *Encuentre la imagen de T y determine $\dim(\operatorname{Im}(T))$.*
4. *Determine si T es un isomorfismo. Justifique.*

Ejercicio 12 *Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.*

1. *Si $T : V \longrightarrow W$ una $\mathbb{K}$-transformación lineal y U es un subespacio vectorial de V entonces $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ es un subespacio vectorial de W.*
2. *Si $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función definida por $T(x, y) = (x, 2y, 3)$ entonces T es una transformación lineal epiyectiva.*
3. *Si $T : C([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $T(f) = f(0)$, para todo $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ entonces T es una transformación lineal inyectiva.*
4. *Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal tal que $\dim(W) < \dim(V)$ entonces T no es epiyectiva.*
5. *Si $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es una transformación lineal, entonces existe $v \in \mathbb{R}^5$, $v \neq 0$ tal que $T(v) = 0$.*
6. *Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal tal que $\dim(W) = 3$ y $\dim(V) = 2$, entonces T no es epiyectiva.*
7. *Si $T : \mathbb{C}^6 \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ es una $\mathbb{C}-$transformación lineal entonces el núcleo de T es diferente del espacio nulo.*
8. *Si $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\right\}$ entonces U es isomorfo a $\mathbb{R}^2$.*
9. *Si $\dim(V) = \dim(W)$ entonces existe $T : V \longrightarrow W$ un isomorfismo.*
10. *Si $T : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo y $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V entonces $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ es una base de W.*